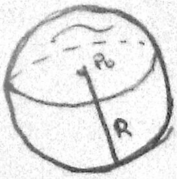
7/11/16

Διαφ. Γεωμετρία

Σφαιρικές καμπύλες



$$c(s) - p_0 = R\left(\cos\omega(s)\,\vec{n}(s) + \sin\omega(s)\,\vec{b}(s)\right)$$

$$\begin{cases} k = -\dfrac{1}{R\cos\omega}, \quad \tau = -\dot{\omega} \\ \Downarrow \\ k \geq \dfrac{1}{R} \end{cases}$$

$$\frac{1}{k} = -R\cos\omega \xRightarrow{\text{παραγωγίζω}} -\frac{\dot{k}}{k^2} = \dot{\omega}R\sin\omega \iff \frac{\dot{k}}{k^2} = -\dot{\omega}R\sin\omega \iff \frac{\dot{k}}{k^2} = \tau R\sin\omega \iff$$

$$\iff \frac{\dot{k}}{k^2\tau} = R\sin\omega$$

$$\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} = \dot{\omega}R\cos\omega = -\frac{\dot{\omega}}{k} \Rightarrow \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} = \frac{\tau}{k}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $c(s)$ καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο καμπυλότητα $k(s)>0$ $\forall s$ και στρέψη $\tau(s) \neq 0$ $\forall s$ ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η c σφαιρική

$$\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} = \frac{\tau}{k}$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} = \frac{\tau}{k}$

$$\left(c(s) - p_0 = -\frac{1}{k}\vec{n} + \frac{\dot{k}}{k^2\tau}\vec{b}\right)$$

Θεωρώ τη διανυσματική συνάρτηση

$$\alpha(s) = c(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{n}(s) - \frac{\dot{k}(s)}{k^2(s)\tau(s)}\vec{b}(s)$$

$$= \vec{t} - \frac{\dot{k}}{k^2}\vec{n} + \frac{1}{k}(-k\vec{t} + \tau\vec{b}) - \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot}\vec{b} - \frac{\dot{k}}{k^2\tau}(-\tau\vec{n})$$

$$= \left(\frac{\tau}{k} - \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot}\right)\vec{b}$$

$$= 0 \Longrightarrow$$

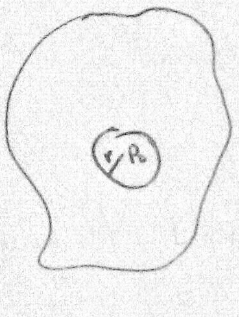
$\Longrightarrow \alpha(s) = p_0 =$ σταθερό

$$\|c(s) - p_0\|^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^2$$

$$\frac{d}{ds}\left(\|c(s) - p_0\|^2\right) = -\frac{2}{k}\frac{\dot{k}}{k^2} + 2\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} = -\frac{2\dot{k}}{k^3} + \frac{2\dot{k}}{k^2\tau}\frac{\tau}{k} = 0 \Rightarrow \|c(s) - p_0\| = \text{σταθ.}$$

Επιφάνειες

$\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$



U ανοιχτό $\Longleftrightarrow \forall p_0 \in U$ υπάρχει $B_r(p_0) \subset U$

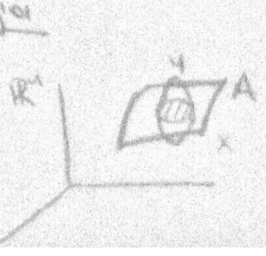
$B_r(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^n \,/\, d(p, p_0) < r\}$

Συνεχείς απεικονίσεις

Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ απεικόνιση. Η f καλείται συνεχής στο $p_0 \in U$ αν-ν για κάθε περιοχή V του $f(p_0)$ υπάρχει περιοχή $U(p_0) \subset V$ και $f(U(p_0)) \subset V$

Επαγόμενη τοπολογία

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$



Το $X \subseteq A$ καλείται $\boxed{\text{ανοιχτό στο } A}$ αν-ν υπάρχει ανοιχτό Y του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $X = A \cap Y$

• Έστω $f: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ απεικόνιση. Η f καλείται συνεχής στο $p_0 \in A$ αν-ν για κάθε περιοχή V του $f(p_0)$ υπάρχει περιοχή $U(p_0)$ στο A ώστε $f(U(p_0)) \subset V$.

$p \in A$, $f(p) = \left(f_1(p), f_2(p), \dots, f_m(p)\right)$

$f_i: A \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$

Ομοιομορφισμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ

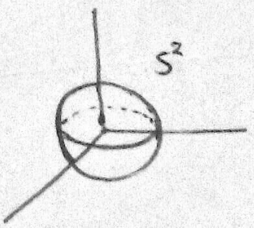
Έστω $f: A\subset\mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$. Η f καλείται ομοιομορφισμός αν-ν:

i) f συνεχής, 1-1 και επί

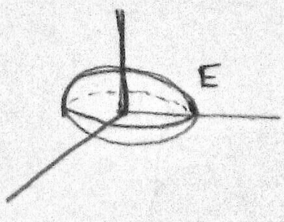
ii) $f^{-1}: B \to A$ να είναι συνεχής

Τα A, B καλούνται ομοιομορφικά αν-ν υπάρχει ομοιομορφισμός $f: A \to B$

Παραδείγματα



$S^2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 = 1 \}$



$E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \}$ $a, b, c \in (0, +\infty)$

Ισχυρισμός

S^2 και E είναι ομοιομορφικά. Θεωρώ την απεικόνιση $f: S^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (ax, by, cz)$

$f(S^2) = E$.

$f^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{1}{a}x, \frac{1}{b}y, \frac{1}{c}z\right)$

Διαφορίσιμες Απεικονίσεις (επιβάλλεται το σύνολο να είναι ανοικτό)

ΟΡΙΣΜΟΣ

$f: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Η f καλείται διαφορίσιμη στο σημείο $p_0\in U$ αν-ο υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ώστε

(→ η παράγωγος απ' το x στο x_0)

$$\lim_{p\to p_0}\frac{f(p)-f(p_0)-T(p-p_0)}{\|p-p_0\|}=0$$

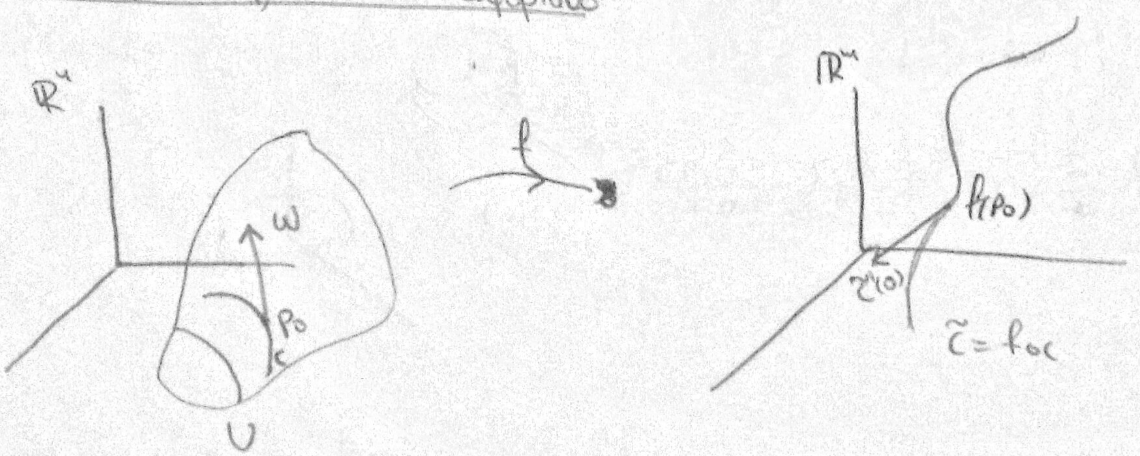
Η L είναι μοναδική, καλείται διαφορικό της f στο p και συμβολίζεται με $df_{p_0}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

$f=(f_1,\dots,f_m)$: f διαφορίσιμη $\Leftrightarrow$ f_i διαφορ. $i\in\{1,\dots,m\}$.

Ο πίνακας του df_{p_0} ως προς τις συνήθεις βάσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της f στο p_0

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p_0)\end{pmatrix}$$

Γεωμετρική Ερμηνεία Διαφορικού

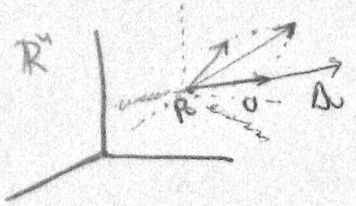


$\omega\in\mathbb{R}^n$ $df_{p_0}(\omega)$

Θεωρώ καμπύλη $c(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$ τέτοια ώστε $c(0)=p_0$ και $c'(0)=\omega$

Θεωρώ την $\tilde{c}\ (-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^m$ $\tilde{c}(0)=f(p_0)$. Ισχύει $\boxed{df_{p_0}(\omega)=\tilde{c}'(0)}$

Το σύνολο όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ με αφετηρία το p_0 συμβολίζεται με $T_{p_0}\mathbb{R}^n$



- Όταν το διαφορικό είναι 1-1 τότε και η απεικόνιση είναι 1-1 σε μία συγκεκριμένη περιοχή, αρκεί η f να είναι το λιγότερο C^1 και το $m=n$

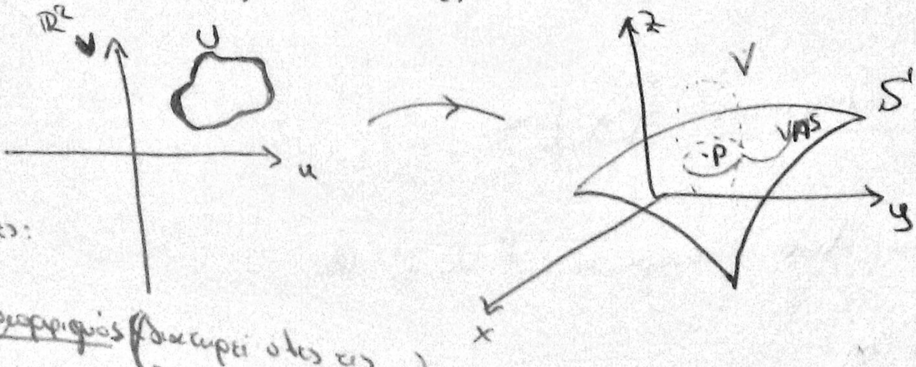
<u>Κανονικές Επιφάνειες</u>

<u>Ορισμός</u>

Ένα υποσύνολο $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^3$ καλείται <u>κανονική επιφάνεια</u> αν-ν για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει διαφορίσιμη απεικόνιση

$X: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$: επί με

$p \in X(U) = V \cap S$, V ανοιχτό του $\mathbb{R}^3$ με τις εξής ιδιότητες:



(i) $X: U \to V\cap S$ είναι <u>ομοιομορφισμός</u> (διατηρεί όλες τις τοπολογικές ιδιότητες)

(ii) Το dX_q είναι "1-1" $\forall q \in V$

<u>ΟΡΟΛΟΓΙΑ</u>: Η X καλείται σύστημα συντεταγμένων της S (ή παράμετροι).

Το $V\cap S$ καλείται <u>περιοχή</u> <u>συντεταγμένων</u>

Αν $p = X(u,v)$, τότε οι αριθμοί (u,v) καλούνται συντεταγμένες της p ως προς το σύστημα συντεταγμένων X.

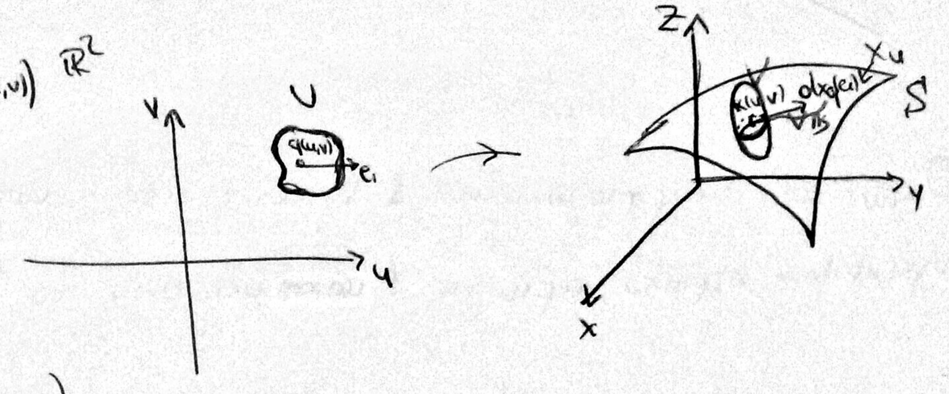
(u,v) αναφέρονται ως παράμετροι.

$X : U \to V \cap S \quad , \quad X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$q = (u,v) \in U \quad dX_q : T_q \mathbb{R}^2 \to T_{X(q)} \mathbb{R}^3$

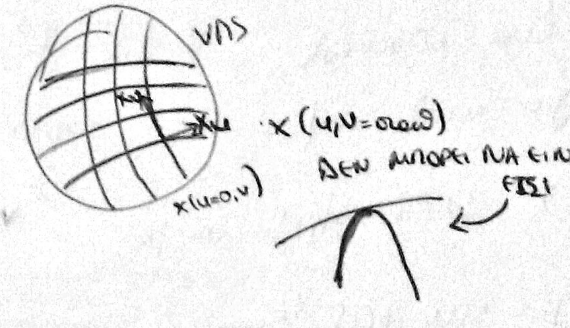
$e_1(1,0)$
$e_2(0,1)$

$$dX_q(e_1) = \frac{\partial X}{\partial u}(q)$$
$$= (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v)) \quad \mathbb{R}^2$$



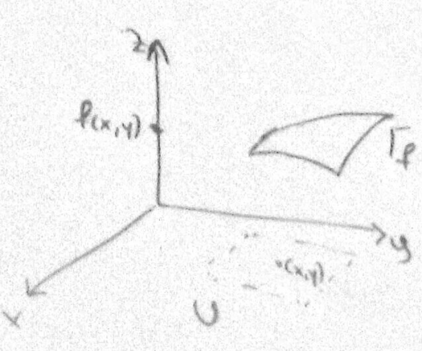
$$dX_q(e_2) = \frac{\partial X}{\partial v}(q)$$
$$= (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v))$$

(ii) $\Leftrightarrow$ $X_u(q), X_v(q)$ είναι γραμ. ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ $X_u \times X_v(q) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ rank $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} = 2$



Επιφάνειες Γραφήματα

Θεωρώ λεία συνάρτηση $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Το γράφημα της f είναι το σύνολο
$\Gamma_f = \{ (x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in U \}$

Ισχυρισμός: Το Γ_f είναι κανονική επιφάνεια.

Θεωρώ την απεικόνιση $X : U \to \Gamma_f \cap V \quad , \quad V = \mathbb{R}^3$

$X(u,v) = (u, v, f(u,v)) \quad (u,v) \in U$

Η X είναι λεία και επί

$$X(u,v) = X(\bar{u},\bar{v}) \Leftrightarrow (u,v,f(u,v)) = (\bar{u},\bar{v},f(\bar{u},\bar{v})) \Rightarrow \begin{cases} \bar{u} = u \\ \bar{v} = v \end{cases} \Rightarrow X: 1\text{-}1$$

$$X^{-1}: \Gamma_f \to U \quad , \quad X^{-1}(x,y,z) = (u,v) \Leftrightarrow X(u,v) = (x,y,z)$$

$$(u,v,f(u,v)) = (x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v = y \\ z = f(u,v) \end{cases}$$

$X^{-1}(x,y,z) = (x,y)$ κ X^{-1} συνεχής $\Rightarrow$ X ομοιομορφισμός

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1) \neq (0,0,0)$$

$\Longrightarrow$ Γ_f κανονική επιφάνεια